Quadratische Funktionen • Optimierungsaufgaben
Übung

1. Ein Seil mit acht Metern Länge soll zu einem Rechteck gelegt werden. Geben Sie fünf mögliche Zahlenpaare für die Seitenlängen a und b des Rechtecks an sowie den jeweils zugehörigen Flächeninhalt A. Wie sind a und b zu wählen, damit der Inhalt des Rechtecks maximal wird?

2. An einer Mauer soll ein Zaun mit der Länge 160 m zu einem Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt aufgestellt werden. Wie sind die Seiten des Rechtecks zu wählen?

3. Aus einem Draht mit Gesamtlänge 40 cm soll ein Quadergerüst geschweißt werden. Eine Kante des Quaders soll dabei 4 cm lang sein. Wie lang müssen die anderen beiden Kanten sein, damit das Volumen des Quaders möglichst groß wird?

4. Der Benzinverbrauch eines Autos hängt unter anderem von seiner Geschwindigkeit ab. In einer Untersuchung wird der Benzinverbrauch B eines Autos in Liter pro 100 gefahrene Kilometer gemessen. Die Höchstgeschwindigkeit des Autos beträgt 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Es werden folgende Werte ermittelt:

v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	30	80	130
B in Liter pro 100 km	5,4	5,9	11,4

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Abhängigkeit des Benzinverbrauchs von der Geschwindigkeit durch eine quadratische Funktion dargestellt werden kann.

a) Ermitteln Sie den Term des von v abhängigen Benzinverbrauchs B des Autos und geben Sie die Definitionsmenge D_B der Funktion B an.
[Teilergebnis: $B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 7{,}5$]

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Geschwindigkeit, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist. Geben Sie diesen an.

c) Berechnen Sie den Benzinverbrauch, wenn das Auto mit einer Geschwindigkeit von 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Ermitteln Sie auch, welche Geschwindigkeit zu einem Verbrauch von 20 Litern pro 100 km führt.

Quadratische Funktionen • Optimierungsaufgaben
Lösung

1. Hauptbedingung: $A = a \cdot b$
   Nebenbedingung: $2a + 2b = 8 \Rightarrow b = 4 - a$
   Zielfunktion: $A(a) = -a^2 + 4a$
   Definitionsmenge: $D_A = [0; 4]$
   Lösung: $a = 2$

2. Hauptbedingung: $A = a \cdot b$
   Nebenbedingung: $2a + b = 160 \Rightarrow b = 160 - 2a$
   Zielfunktion: $A(a) = -2a^2 + 160a$
   Definitionsmenge: $D_A = [0; 80]$
   Lösung: $a = 40; b = 80$

3. Hauptbedingung: $V = 4 \cdot a \cdot b$
   Nebenbedingung: $4 \cdot 4 + 4a + 4b = 40 \Rightarrow b = 6 - a$
   Zielfunktion: $V(a) = 4a(6 - a) = -4a^2 + 24a$
   Definitionsmenge: $D_V = [0; 6]$
   Lösung: $a = b = 3$

4.
   a) Einsetzen der Zahlenpaare aus der Tabelle in die allgemeine quadratische Gleichung $B(v) = av^2 + bv + c$ ergibt des Gleichungssystem
      I) $900a + 30b + c = 5{,}4$
      II) $6400a + 80b + c = 5{,}9$
      III) $16900a + 130b + c = 11{,}4$
      mit der Lösung $a = 0{,}001$; $b = -0{,}1$ und $c = 7{,}5$.
      Damit ist $B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 7{,}5$.
      Definitionsmenge ist $D_B =]0; 200]$.

   b) Maximalwert am Scheitelpunkt $v_S = -\frac{-0{,}1}{2 \cdot 0{,}001} = 50$
      $B(50) = 5 \ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$

   c) Bei $110 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ liegt der Verbrauch bei 8,6 l/100km,
      eine Geschwindigkeit von $v \approx 176 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ führt zu einem Verbrauch von $20 \ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$.